ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN BÌNH DƯƠNG

CHÉO HÓA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Nguyễn Bình Dương

CHÉO HÓA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn

Thái Nguyên - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn là nguồn tài liệu mở. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 5 tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Nguyễn Bình Dương

Xác nhận	**Xác nhận**
của khoa chuyên môn	**của người hướng dẫn**

PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS. TSKH. Đoàn Thái Sơn. Tôi xin cảm ơn thầy về sự hướng dẫn tận tình và hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu và hoàn thiện luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán, các thầy cô giáo trong tổ bộ môn đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và thực hiện luận văn thạc sĩ.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn gia đình, bạn bè đã quan tâm giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Tuy nhiên, luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong nhận được sự góp ý từ các thầy cô giáo để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 5 tháng 9 năm 2020

Người viết luận văn

Nguyễn Bình Dương

Mục lục

Lời cam đoan . . . . **i**

Lời cảm ơn . . . . **ii**

Mục lục . . . . **iii**

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt . . . . **iv**

Mở đầu **1**

Chương 1. Khái niệm phổ nhị phân mũ cho phương trình vi phân tuyến tính **3**

1.1. Tính nhị phân mũ 3

1.2. Phổ nhị phân mũ 7

1.3. Ví dụ 15

Chương 2. Chéo hóa phương trình vi phân tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều **17**

2.1. Một số kết quả chuẩn bị về tích phân Lebesgue và các hàm liên tục tuyệt đối 17

2.2. Phép biến đổi tương đương 23

2.3. Chéo hóa 25

Kết luận **32**

Tài liệu tham khảo **33**

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^{n\times n}$	tập các ma trận vuông cấp n
$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$	Hàm ma trận khả tích địa phương
$\emptyset$	tập rỗng
$\oplus$	tổng trực tiếp
$GL_N(\mathbb{R})$	Nhóm các ma trận tuyến tính khả nghịch cấp N
$\operatorname{im} P$	Ảnh của phép chiếu P
$\ker P$	Nhân của phép chiếu P
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

với hàm ma trận $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ là liên tục và bị chặn. Nếu (1) là phương trình vi phân với hệ số không phụ thuộc thời gian, tức là

$$\dot{x} = Ax, \qquad \text{trong đó } A \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

thì việc thay đổi biến $x \mapsto T^{-1}x$ biến phương trình trên thành phương trình có dạng

$$\dot{x} = T^{-1}\text{ATx}.$$

Do đó, bằng cách lựa chọn các ma trận khả nghịch T một cách phù hợp ta có thể đơn giản hóa phương trình tuyến tính với hệ số không phụ thuộc thời gian. Ví dụ ta có thể chọn ma trận khả nghịch T sao cho $T^{-1}AT$ là ở dạng chuẩn Jordan.

Trong khuân khổ nội dung luận văn này, chúng ta sẽ tìm hiểu một kết quả tương tự như trên cho hệ phương trình tuyến tính phụ thuộc thời gian (1). Ở đây chúng ta sử dụng khái niệm khả quy như được định nghĩa ở trong Coppel [3]. Cụ thể, hệ (1) được gọi là *khả quy* nếu tồn tại một phép đổi biến khả nghịch phụ thuộc thời gian biến đổi hệ (1) thành một hệ đường chéo khối với số chiều trên mỗi đường chéo khối này là nhỏ hơn hẳn N.

Để mở rộng kết quả của dạng chuẩn Jordan cho hệ tuyến tính phụ thuộc vào thời gian thì chúng ta cần nhắc tới lý thuyết phổ phù hợp đối với hệ (1). Khái niệm phổ này có thể coi là khái niệm khái quát giá trị riêng theo một cách thích hợp. Nhắc lại rằng, trong lịch sử đã có nhiều khái niệm phổ cho phương trình (1), ví dụ khái niệm phổ Lyapunov cho các hệ chính quy, khái niệm phổ Morse cho hệ động lực trên tích lệch (xem Colonius và Kliemann [4]), hoặc khái niệm phổ Bohl với mục đích mô tả tất cả các tốc độ tăng trưởng đều của hệ với thời gian dương (xem Daleckii và Krein [5]). Tuy nhiên, khái niệm phổ Sacker-Sell, hay còn gọi là phổ nhị phân mũ, dường như là khái niệm phổ phù hợp để giải quyết câu hỏi mở rộng trên.

Nhằm trình bày một cách có hệ thống kết quả mở rộng định lý dạng chuẩn Jordan cho hệ tuyến tính phụ thuộc thời gian trong Siegmund [9], luận văn bao gồm các nội dung sau:

Chương 1: Khái niệm phổ nhị phân mũ cho phương trình vi phân tuyến tính.

Chương 2: Chéo hóa phương trình vi phân tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều.

Cuối cùng là phần kết luận tóm tắt những kết quả đạt được và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1

Khái niệm phổ nhị phân mũ cho phương trình vi phân tuyến tính

Xét một hệ phương trình vi phân tuyến tính không ôtônôm có dạng

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1}$$

với $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ là một hàm đo được và khả tích địa phương, tức là với mọi đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ta có

$$\int_a^b \|A(t)\| \, dt < \infty.$$

Mục đích chính của chương này là trình bày khái niệm phổ nhị phân mũ cho phương trình (1.1) và định lý phổ nhị phân mũ cho phương trình này. Kết quả của chương này được chứng minh trong [9].

1.1. Tính nhị phân mũ

Ta kí hiệu $\Phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}, (t,\tau) \mapsto \Phi(t,\tau)$ là toán tử *tiến hóa* của phương trình (1.1), tức là $\Phi(.,\tau)\xi$ giải bài toán giá trị ban đầu (1.1) với $\chi(\tau) = \xi$. Một phép chiếu bất biến của (1.1) được định nghĩa là một hàm $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{N\times N}$ của các phép chiếu $P(t)$, $t \in \mathbb{R}$, sao cho

$$P(t)\Phi(t,s) = \Phi(t,s)P(s), \;\; t, s \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Lưu ý rằng P liên tục do đồng nhất thức $P(\cdot) \equiv \Phi(., s)P(s)\Phi(s, .)$. Chúng ta sẽ nói rằng (1) có *tính nhị phân mũ* nếu có một phép chiếu bất biến P và các hằng số $K \geq 1, \alpha > 0$ sao cho

$$\|\Phi(t,s)p(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \text{ với } t \geq s$$

$$\|\Phi(t,s)[I - P(s)]\| \leq Ke^{\alpha(t-s)} \text{ với } t \leq s.$$

Tiếp theo chúng ta nghiên cứu một lớp các phương trình dịch chuyển sau

$$\dot{x} = (A(t) - \gamma I)x \tag{1.3}$$

trong đó $\gamma \in \mathbb{R}$. Dễ dàng thấy rằng $\Phi_\gamma(t,s) := e^{-\gamma(t-s)}\Phi(t,s)$ là toán tử tiến hóa của nó. Nếu với một giá trị γ nào đó mà phương trình dịch chuyển (1.3) có tính nhị phân mũ với họ các phép chiếu bất biến P thì khi đó P cũng là phép chiếu bất biến đối với $\dot{x} = A(t)x$, tức là (1.2) thỏa mãn. Hơn nữa, ta có các bất đẳng thức sau

$$\|\Phi(t,s)P(s)\| \leq Ke^{(\gamma-\alpha)(t-s)} \text{ với } t \geq s$$

$$\|\Phi(t,s)[I - P(s)]\| \leq Ke^{(\gamma+\alpha)(t-s)} \text{ với } t \leq s$$

Nhận xét 1.1. Nếu $\dot{x} = [A(t) - \gamma I]x$ có tính nhị phân mũ với phép chiếu bất biến $P \equiv I$ thì $\dot{x} = [A(t) - \zeta I]x$ cũng có tính nhị phân mũ với cùng một phép chiếu bất biến cho mọi $\zeta > \gamma$. Khẳng định trên cũng đúng với mọi $\zeta < \gamma$ nếu $P \equiv 0$.

Tiếp theo ta trình bày khái niệm mô tả tốc độ tăng trưởng mũ của một hàm số.

Định nghĩa 1.2. Giả sử $\gamma \in \mathbb{R}$. Một hàm liên tục $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ là

(a) γ^+ - bị chặn nếu $\sup_{t\geq 0} \|g(t)\| e^{-\gamma t} < \infty$.

(b) γ^- - bị chặn nếu $\sup_{t\leq 0} \|g(t)\| e^{-\gamma t} < \infty$.